Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 Martie 2012

CLASA a XI-a

Problema 1. Pentru un număr real $a > 1$ dat, considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = a$ şi

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = x_1 x_2 \cdots x_{n+1},$$

pentru orice $n \geq 1$. Arătaţi că şirul este convergent şi determinaţi limita sa.
Gazeta Matematică

Problema 2. Fie matricele pătrate A, B de ordin 3 cu elemente numere reale astfel încât $AB = O_3$.
a) Demonstraţi că funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dată de $f(x) = \det(A^2 + B^2 + xBA)$ este polinomială de grad cel mult 2.
b) Demonstraţi că $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi matricile $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $A \cdot B^2 = A - B$.
a) Arătaţi că matricea $I_n + B$ este inversabilă;
b) Arătaţi că $AB = BA$.

Problema 4. O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are proprietatea $\mathcal{F}$ dacă pentru orice $a \in \mathbb{R}$ există un interval (b, a) astfel încât pentru orice $x \in (b, a)$ să avem $f(x) \leq f(a)$.
a) Daţi un exemplu de funcţie cu proprietatea $\mathcal{F}$ nemonotonă pe $\mathbb{R}$.
b) Arătaţi că dacă f este continuă şi are proprietatea $\mathcal{F}$, atunci f este crescătoare.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.